*Последовательности и прогрессии в школьном курсе алгебры 9-го класса, отработка заданий темы при подготовке к ГИА по математике.*

Государственная итоговая аттестация дает большие возможности для диагностики учебных достижений учащихся. По отношению к конкретному ученику итоговая аттестация позволяет решать три основные задачи:

1. Выявление конкретных недостатков в знаниях и умениях учащихся;
2. Определение уровня его математической компетентности;
3. Выявление готовности к обучению к старшей школе.

Основные блоки содержания математического образования 5-9-х классов в материалах ГИА делятся на разделы, охватывающие весь круг вопросов, подлежащих контролю на выходе из 9-го класса. Один из таких разделов: «Последовательности и прогрессии». Это придает важность изучению данного блока и его повторению при подготовке к ГИА.

Задания блока «Последовательность и прогрессии направлены на проверку владения следующими знаниями и умениями:

* знать и понимать термины «последовательность», «член последовательности», «n-й член последовательности», «арифметическая прогрессии», «геометрическая прогрессия»;
* понимать и использовать индексные обозначения;
* находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена или рекуррентным способом;
* распознавать арифметические и геометрические прогрессии при различных способах задания, переходить от одного способа задания прогрессии к другому;
* применять формулы n-го члена и суммы первых n-х членов «арифметической и геометрической прогрессий для решения не сложных задач, в том числе на жизненной практики.

Для решения задач, включаемых в экзамен, достаточно владеть терминологией и символикой, знать основные формулы, понимать смысл основных понятий и прибегать к здравому смыслу.

В этой работе: выявлены проанализированы основные недостатки математической подготовки школьников по разделу «Последовательности и прогрессии»;приведены задания по разделу с целью корректировки пробелов и подготовки к итоговой аттестации.

***Диагностика ошибок: основные недостатки подготовки учащихся по блоку «Последовательности и прогрессии».***

* Учащиеся не владеют индексными обозначениями,
* не могут перевести на естественный язык рекуррентное соотношение.

Они усваивают тему формально, не овладевая, ее общеобразовательной составляющей. При этом одним из результатов изучения темы должно быть понимание того, что, зная первый член последовательности, можно по известному правилу найти второй член; зная второй член, можно точно также найти третий и т.д., и чтобы найти, например, a30, придется последовательно вычислять все предыдущие члены со 2 по 29-й включительно. Кроме того, такие формулы важно уметь «читать». Пусть, например, последовательность (an) задана с помощью рекуррентной формулы: а1 = 1, аn+1 = 2an + 1. Данная рекуррентная формула указывает такой способ вычисления членов последовательности: чтобы получить следующий член, нужно предыдущий член умножить на 2 и к результату прибавить 1:

 а2 = 2а1 + 1= 2 \* 1 + 1= 3

 а3 = 2а2 + 1= 2 \* 3+ 1 = 7 и т.д.

А вот последовательность, заданная формулой n-го члена, позволяет вычислить любой член последовательности по его номеру. Найдем, например, с30 в последовательности (сn), заданной формулой сn =$ \frac{n+5}{10}$. Подставив в формулу n=30, получим с$ =\frac{30+5}{10}$ = 3,5

Вообще, если предложено рекуррентная формула, то количество справившихся с заданием учеников меньше ожидаемого, хотя решение таких заданий всегда сводится к простому вычислению по приведенной формуле нескольких членов прогрессии.

Вот один из примеров такого задания:

**| *Последовательность задана условиями: x1 = 5, x n+1 =*** $\frac{1}{x}$ ***. Найдите x6*.**

 Именно рекуррентным способом определяются арифметическая и геометрическая прогрессии. Возможно, поэтому учащихся затрудняют базовые, основополагающие задания на распознание арифметической и геометрической прогрессий при разных способах задания последовательностей: перечислением первых нескольких членов, рекуррентной формулой, формулой n-го члена (от 20 до 30% учащихся не справляются с заданиями такого рода).

Одна из причин возникающих пробелов – рекуррентные формулы рассматриваются мимоходом и достаточно формально, они не осознаются школьниками как символическая запись вычислительного алгоритма.

1. У учащихся стабильно возникают трудности в тех случаях, когда от них требуется перейти с одного математического языка на другой или речь идет о некоторой интерпретации. Большие трудности вызывает задача, связанная с пониманием представления членов арифметической прогрессии точками на координатной плоскости.

Например: **|*Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого по горизонтальной оси откладывают номер члена, а по вертикальной – соответствующий член последовательности. На рисунке изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии (аn). Найдите а1 и d.***

Одной из причин возникающих трудностей является узкий отбор учебного материала, состоящего преимущественно из стандартных задач. В результате учащиеся не осознают сущностные аспекты содержания данного вопроса, затруднен перенос задания на аналогичную, но все же новую ситуацию. Учащиеся ориентируются не на существенные, основополагающие отношения, а на внешние ситуативные.

Наиболее часто встречающимися в разделе «Последовательность и прогрессии» являются задания, связанные с пониманием и применением формулы n-го члена арифметической прогрессии. Например:

|***Из арифметической прогрессии, заданных формулой n-го члена выбрать ту, для которой выполняется усовия а10>0***

1. an= - 4

2. an= 4n – 40

3. an = 4n – 50

4. an = - 4n + 50

Решение состоит в том, чтобы для каждой из данных арифметических прогрессий определить ее член с заданным номером и сравнить его с нулем. Обычно, большинство учащихся хорошо справляются с заданием. Возникающие ошибки чаще всего являются вычислительными.

В то же время задания, в которых требовалось определить разность арифметической прогрессии по формуле n-го члена, оказались трудными для учащихся, несмотря на то, что, даже не владея соответствующим знанием, учащиеся могли легко найти разность прогрессии, выполнив ту же работу, что и в показанном выше примере.

***|Арифметические прогрессии (an), (yn) и (zn) заданы формулами n-го члена: an = 2n + 4, yn = 4n, zn = 4n + 2. Укажите те из них, у которых разность d равна 4.***

***1. (xn) и (zn)***

***2. (yn) и (zn)***

***3. (an), (yn) и (zn)***

***4. (an)***

В этом задании затруднения возникают у 35%-45% школьников. Причина в непонимании смысла самой формулы, в натаскивании на стандартные задачи.

 Рассмотрим примеры заданий повышенного уровня трудности. Они содержатся во второй части экзаменационной работы. Выполняют их учащиеся, имеющие хорошую математическую подготовку.

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые не делятся на 3.

 Ученик должен, прежде всего, распознать арифметическую прогрессию, а затем применить формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии для суммирования натуральных чисел и чисел, кратных 3.

 При решении учащиеся должны сделать логический шаг: чтобы найти сумму чисел, не делящихся на 3, надо найти сумму всех натуральных чисел до заданного числа включительно и вычесть из нее сумму тех чисел, которые делятся на 3. Этот логический прием применяется при решении многих задач повышенного уровня, и обучение математике обязано формировать у сильных учащихся соответствующее умение. Никакими специальными приемами для решения подобной задачи владеть не надо, все необходимые фактические знания учащиеся получают в общем курсе алгебры основной школы.

 Рассмотрим еще два задания из второй части работы.

| ***Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии --8,6;-8,4;…***

|  ***В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135.Найдите первые три члена этой прогрессии.***

 Из этих двух заданий на арифметическую и геометрическую прогрессии более трудным для учащихся оказалось первое .Хотя задания. связанные с арифметической прогрессией, решаются учащимися лучше и охотнее, чем с геометрической, что связано с характером вычислений.

 Условие первого задания носит содержательный характер, поскольку предложенную арифметическую прогрессию надо сначала самостоятельно задать формулой n-го члена, а условие второго задания- более формальное, так как можно сразу применять известные формулы. Содержательное для учащихся кажется труднее формального.

 ***Методические разработки:***

 ***Отработка задач на нахождение номера члена прогрессии***

 Методика формирования умения определять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии

*І. Введение схемы решения*

Решается задание:

***| Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9;,.. число 156?***

Сначала в процессе диалога выясняется идеи реше­ния, которая позволяет составить план ответа на вопрос зада­чи.

* Как на языке последовательности сказать иначе, что после­довательность содержит (или не содержит) какое-то число?

*Это значит, что число является (или не является) членом последовательности.*

* Чем определяется место члена последовательности?

*Номером члена последовательности*

* Каким числом является номер?

*Натуральным.*

* Итак, если нам удастся определить номер числа 156 в ариф­метической прогрессии, то как мы ответим на вопрос задачи?

*Прогрессия содержит число 156.*

* Что известно об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на этот вопрос?

*В прогрессии известны первый и второй члены, значит, про­грессия задана полностью, поэтому данных достаточно,*

* Что позволит найти номер члена прогрессии?

*Формула п-го члена (записывается на доске, и анализиру­ются известные величины). В ней известны п-й член и первый, разностъ прогрессии можем найти по условию задачи. Значит, сможем найти число п.*

Составляется план решения и вписывается решение.

1.Найдем для данной арифметической прогрессии разность d
по формуле х2-x1=d, то есть d=9-2=7.

2.Запишем формулу n-го члена арифметической прогрессии:

xn=x1 + d(n –1)

3.Подставим в эту формулу значения х1 и d, а вместо хnданное
число 156, получим уравнение: 156=2+7(n-1)

4.Решим полученное уравнение относительно ней местного п.

156=2+7n-7

7n=151

n-23.

5.Так как n, равное 23, является натуральным числом, то делаем вывод, что данная арифметическая прогрессия содержит число 156, оно будет 23-м членом этой прогрессии.

6.Ответ: число 156 является членом данной арифметической прогрессии.

 *Составляется схема выполнения заданий рассмотренного вида:*

1.Найти или указать первый член и разность арифметической прогрессии (х1и d).

2.Записать формулу n-го члена прогрессии xn=x1+d(n-1) .

3.Подставить в эту формулу найденные значения х1 и d, а вме­сто Хn - заданное число,

4. Решить полученное уравнение относительно n.

5. Сделать вывод: если nЄN , то данное число является членом прогрессии; если n – не является натуральным, то данное число не является членом данной арифметической прогрессии.

6. Записать ответ.

*II. Выполнение упражнений на отработку шагов алгоритма*

 |*Упражнения на повторение умения находить первый член и разность для арифметической прогрессии* (1-й шаг алгоритма),

1.Найдите разность арифметической прогрессии:

 а) $\frac{1}{2;}$; 1;… г) У1=8, У2=24

б) 4,5; -6;… д) а1=3$\frac{1}{2}$ , а7=9$\frac{1}{2}$

в) 3; 4$\frac{1}{2}$;…

2. Найти первый член арифметической прогрессии, если:

а) а5=162, d=2 б) а8=-27, d=-1,5

3. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно:

 а) с5=-2; с8=-9 б) а3=5,5, а9=14,5

*|Упражнения на формирование умения составлять уравнения и находить номер заданного члена последовательности* (3-4-й шаги алгоритма).

1) Найдите номер члена арифметической прогрессии:

а) равного -10,64, если а1=1,26; d=- 4,3

б) равного 50, если заданы два первых члена прогрессии

*|Упражнения на формирование умения делать вывод о принадлежности заданного числа данной прогрессии* (5-й шаг алгоритма).

1) Может ли член арифметической прогрессии иметь но­мер, равный:

 а) - 1$\frac{2}{3}$; б) 0; в) 24; г) 1,5; д) - $\frac{1}{3}$ ; е) -7

III. Закрепление умения

Выполняются упражнения на закрепление умения опреде­лять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии или нет.

1. Содержит ли арифметическая прогрессия 2, 9;... число:

а) 269; в)-7.3:

6)16,1; г) 0?

2. Дана арифметическая прогрессия (аn) у которой a1=23, d=-1,5.
Является ли членом этой прогрессии число:

а)0; б)-28; в) 47.

3. Является ли членом арифметической прогрессии число 34,
если:

а)y1=10, y2=22

б)x32=138, d=4

4. Является ли число 45 членом арифметической прогрессии (аn), если а4=25, а7=40?

Замечание. В примерах на закрепление меняются спосо­бы задания арифметической прогрессии и ее виды.

 ***Основные методы решения задач на прогрессии (в том числе с помощью систем уравнений).***

1. Все данные выражаются через первый член и разность (знаменатель) прогрессии и далее решается система уравнений.

2. Более короткие решения получаются при использовании формулы для выражения аk через равностоящие члены, т.е. аk-s и ak+s.

Приведенные примеры повышенного уровня, соответствуют заданиям второй части итоговой аттестации.

***Пример 1.*** В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 132, а сумма второго и третьего членов равна 110. Найдите первые три члена этой прогрессии.

 *Решение.* Пусть (bn) – данная геометрическая прогрессия. По формуле n - го члена геометрической прогрессии bn=b1\*qn-1, где b1 – первый член прогрессии, q – ее знаменатель, выразим данные члены прогрессии: b2=b1q, b3=b1q2.

 *Составим и решим систему уравнений:*

$\left\{\begin{array}{c}b\_{1}+b\_{2}=132\\b\_{2}+b\_{3}=110\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}b\_{1}+b\_{1}q=132\\b\_{1}q+b\_{1}q^{2}=110\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}b\_{1}\left(1+q\right)=132\\b\_{1}q\left(1+q\right)=110\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}b\_{1}\left(1+q\right)=132\\q\*132=110\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}b\_{1}=72\\q=\frac{5}{6}\end{array}\right.$

B2 =72\*$\frac{5}{6} $=60, b3 =60\*$\frac{5}{6} $=50

Ответ: 72; 60; 50

 *Другое решение :* Пусть (b1) – данная геометрическая прогрессия.

По свойству геометрической прогрессии b1b3=$b\_{2}^{2}$. По условию задачи:

$\left\{\begin{array}{c}b\_{1}+b\_{2}=132\\b\_{2}+b\_{3}=110\end{array}\right.$ откуда$\left\{\begin{array}{c}b\_{1}=132-b\_{2}\\b\_{3}=110-b\_{2}\end{array}\right.$

Перемножив, получаем: b1b=(132-b2)(110-b2)

Полученное уравнение перепишем в виде: $b\_{2}^{2}=(132-b\_{2}$)\*(110 – b2)

Полученное уравнение перепишем в виде: $b\_{2}^{2}=\left(132-b\_{2}\right)\*(110-b\_{2})$ или

$b\_{2}^{2}=14520-242b\_{2}$ откуда b2 = 60. Тогда b1 = 72, b3 = 50

 Ответ: 72; 60; 50

***Пример 2.***

Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4.

*Решение*:

1. Найдем сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160. 1; 2;3;...-арифметическая прогрессия: a1=1, d=1.

S160=$\frac{a\_{1}+a\_{160}}{2}\*160=12880$.

1. Найдем сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 160. Последовательность (bn) чисел, кратных 4, задается формулой bn=4n. (bn) – арифметическая прогрессия с b1=4, d=4; bn=160, n=40.

S40=$\frac{b\_{1}+b\_{40}}{2}$ 40, S40=$\frac{4+160}{2}40=82\*40=3280.$

1. Найдем сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4. Эта сумма равна сумме всех натуральных чисел, не превосходящих 160, без суммы натуральных чисел, кратных 4.

12880-3280=9600.

Ответ: 9600.

***Пример 3***.Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые не делятся на 6.

*Решение:* Найдем сумму всех натуральных чисел от 1 до200:

 S200=$\frac{1+200}{200}$ \*200 = 20100

Найдем сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые делятся на 6: а1=6; d=6; аn=6+6(n-1)=198; 1+n-1=33; n=33.

S33=$\frac{6+198}{2}$ \*33=3366; S200-S33=20100- 3366=16734

Ответ: 16734

***Решение задачи из первой части итоговой аттестации***

Каждой последовательности, заданной формулой n-го члена(левый столбец), поставьте в соответствие верное утверждение(правый столбец).

А) an=n2  1) Последовательность – арифметическая прогрессия

Б) yn=2n 2) Последовательность – геометрическая прогрессия

В) zn=2n 3) Последовательность не является прогрессией

*Решение.* Числовая последовательность будет арифметической прогрессией, когда для получения следующего члена последовательности нужно прибавлять одно и то же число.

 Числовая последовательность будет геометрической прогрессией, когда для получения следующего члена последовательности нужно умножать на одно и то же число

Запишем несколько членов каждой последовательности, вычисляя по формулам.

(хn): 1; 4; 9; 16;… - ни прибавления одного и того же числа, ни умножения на одно и то же число не наблюдается,

(уn): 2; 4; 6; 8;… - прибавляется 2 – арифметическая прогрессия,

(zn): 2; 4; 8; 16;… - умножается на 2 – геометрическая прогрессия.

Ответ: $\frac{А}{3}$ ; $\frac{Б}{1}$ $; \frac{В}{2}.$

*Другое решение.* Проверим определения арифметической и геометрической прогрессии.

А) хn=n2, хn+1=(n+1)2.

xn+1-xn=(n+1)2-n2=2n+1 – не является постоянным числом, следовательно, последовательность не является арифметической прогрессией;

$\frac{х\_{n+1}}{x\_{n}}$ =$\frac{(n+1)^{2}}{n^{2}}$ = $\frac{n^{2}+2n+1}{n^{2}}$ – не является постоянным числом, следовательно, последовательность не является геометрической прогрессией.

Б) уn=2n, уn+1=2(n+1).

уn+1 – уn=2(n+1)-2n=2, следовательно, (уn) – арифметическая прогрессия.

В) zn=2n, zn+1=2n+1

$\frac{z\_{n}+1}{z\_{n}}$ =$\frac{2^{n+1}}{2^{n}}$ =2, следовательно, (zn) – геометрическая прогрессия.

Ответ: $\frac{А}{3}$ ; $\frac{Б}{1}$ $; \frac{В}{2}$

Итоговое повторение раздела «Последовательности и прогрессии» направлено на ликвидацию пробелов в знаниях, более глубокому осмыслению основных понятий темы, закреплению умений решать учащимися задач на применение формул n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий; применять аппарат уравнений и неравенств при решении задач на прогрессии различного уровня сложности. Упражнения для повторения должны как можно полнее охватывать содержание раздела.

 Работа с формулами n-го члена и суммы первых n членов прогрессии, помимо своего основного назначения, позволяет неоднократно возвращаться к вычислениям, тождественным преобразованиям, решениям уравнений, неравенств, систем, что способствует дальнейшему развитию вычислительной культуры учащихся, отработке применения аппарата алгебраических преобразований.